

Das Potenzieren und Wurzelziehen von komplexen Zahlen kann rein zeichnerisch gelöst werden. Die geometrische Interpretation dieser Operationen wollen wir uns an digitalen Bildern verständlich machen. Jedes Pixel eines digitalen Bildes wird einer Koordiante in der Ebene zugeordnet. Dabei gehen wir davon aus, dass der Ursprung des Koordinatensystems im Zentrum des Bildes liegt und die horizontale Berandung des Bildes durch das Intervall $[-2, 2]$ auf der x-Achse gegeben ist. Die vertikale Ausdehnung hängt dann jeweils vom Seitenverhältnis des Bildes ab. Die so definierte Koordinate eines Bildpixels liegt erst mal in kartesischer Form vor und muss zunächst in Exponentialform gebracht werden. In der Exponentialform kann eine Potenz zum einen einfach berechnet werden und zum anderen ist die geometrische Interpretation sofort ersichtlich.

Voraussetzung für dieses Aufgabenblatt:

- Umwandlung komplexer Zahlen von kartesischer Form in Exponentialform
- Empfehlung: Aufgabenblatt zu BiLeSA_{PIC}

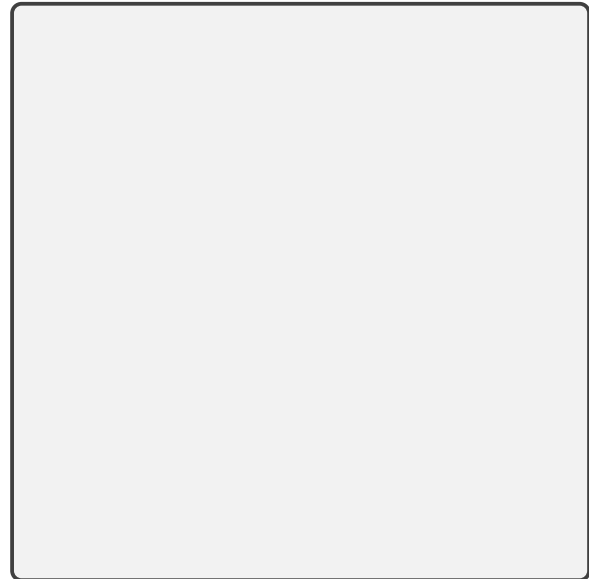
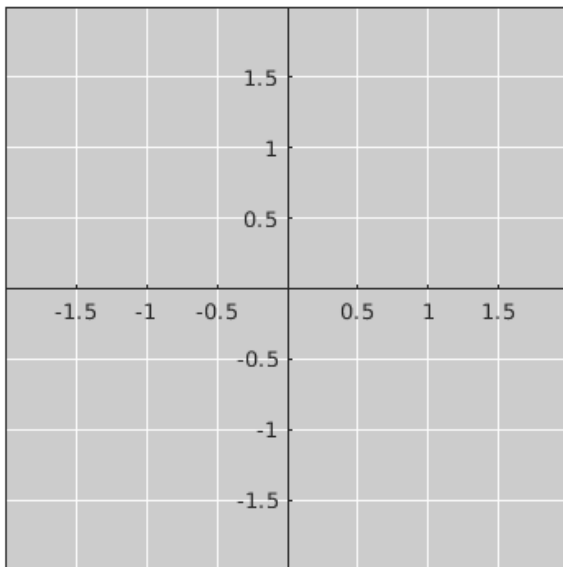
Lernziele

- Sie können Potenzen und Wurzeln (Hauptwerte) von komplexen Zahlen berechnen.
- Sie können erklären welche Operation durch das Potenzieren im \mathbb{R}^2 ausgeübt wird.
- Sie sind in der Lage das Potenzieren von komplexen Zahlen ohne Rechnung sondern rein zeichnerisch durchzuführen.

BETRAG UND ARGUMENT KOMPLEXER ZAHLEN

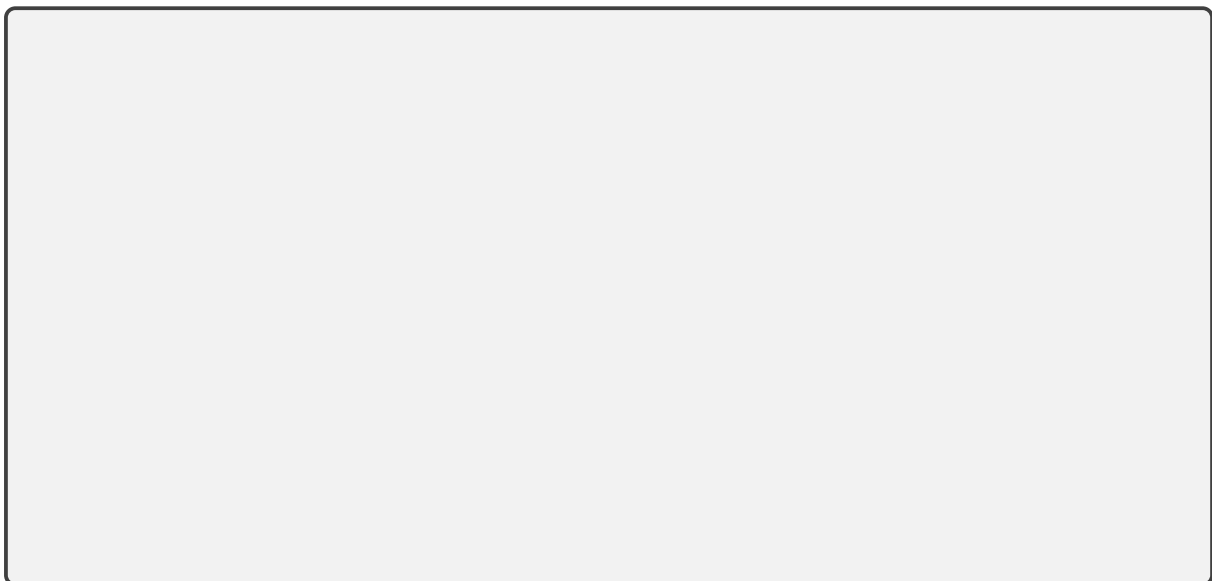
Frage 1

Beschreiben Sie den Betrag einer komplexen Zahl in Worten und anhand einer Skizze.



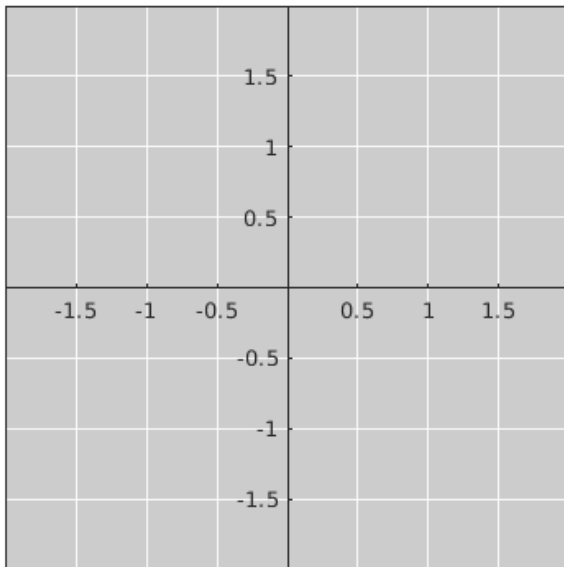
Frage 2

Berechnen Sie den Betrag $|z|$ der komplexen Zahl $z = i - \frac{3}{2}$

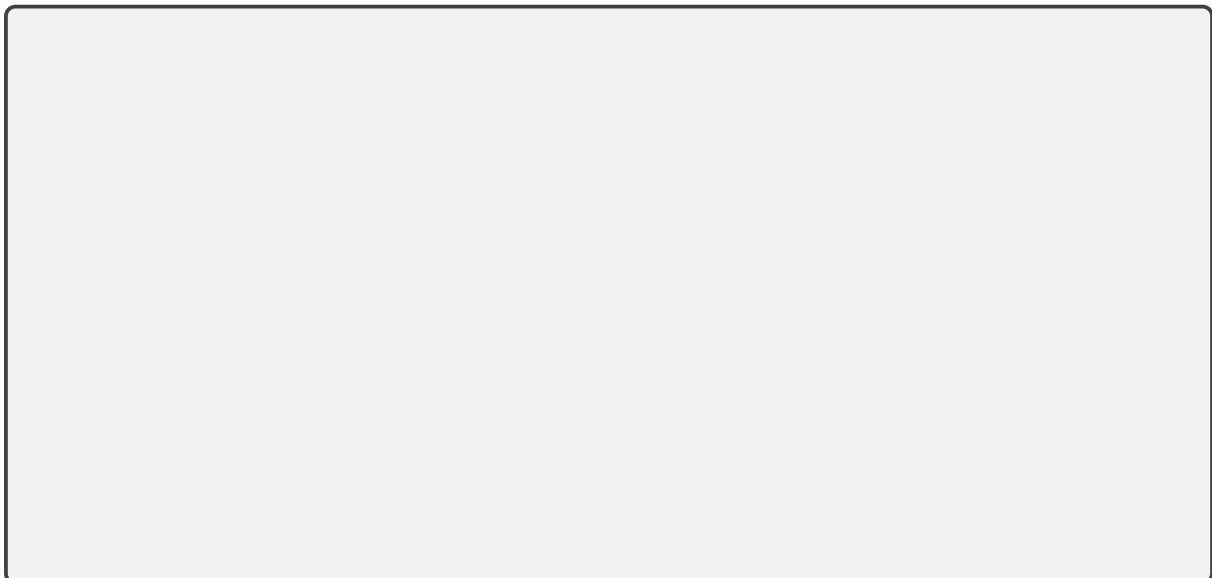


Frage 3

Beschreiben Sie das Argument einer komplexen Zahl in Worten und anhand einer Skizze.

**Frage 4**

Berechnen Sie das Argument $\text{Arg}(z)$ der komplexen Zahl $z = i - \frac{3}{2}$



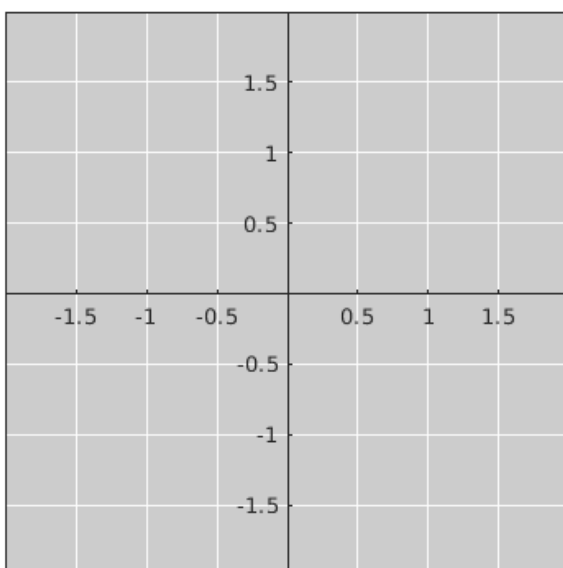
KOMPLEXE ZAHLEN IN EXPONENTIALFORM

Frage 5

(a) Geben Sie die Zahlen $z = i - \frac{3}{2}$ und $w = \frac{1}{2} + i$ in Exponentialform an:

(b) Geben Sie die Zahlen z^2 und $w^{\frac{1}{2}}$ in Exponentialform an:

(c)



Skizzieren Sie die Zahlen

$$z, z^2, z^{\frac{1}{2}}, w, w^2 \text{ und } w^{\frac{1}{2}}$$

in das Achsenkreuz. Berechnen Sie dazu **nicht** die kartesische Form.

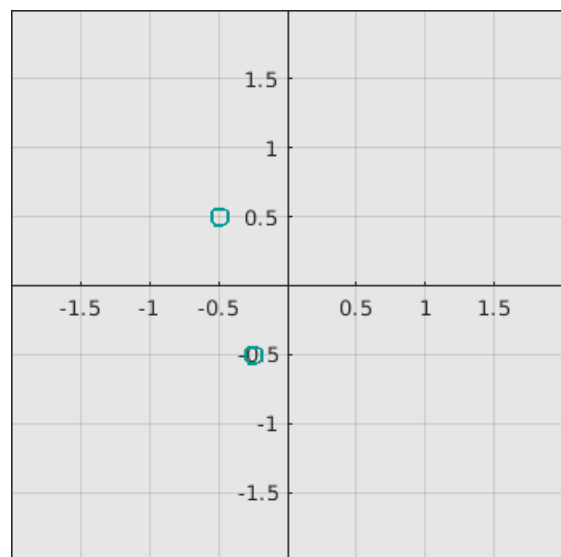
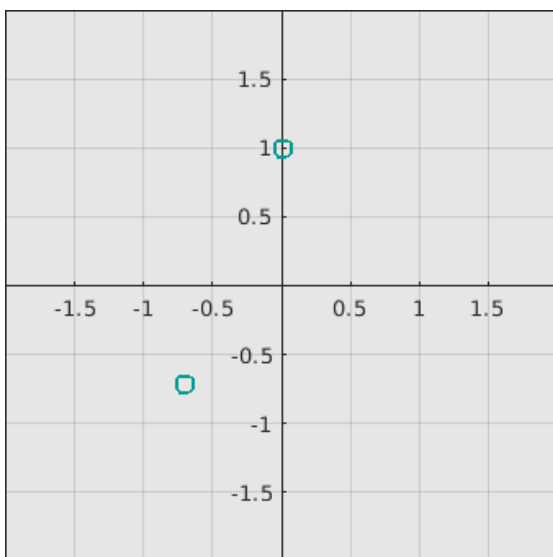
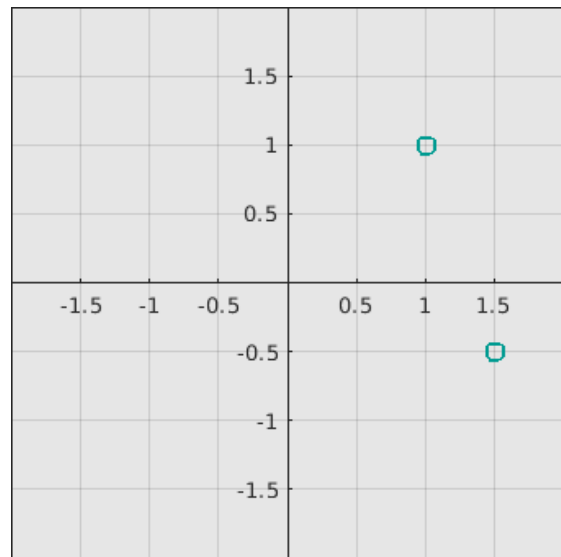
Frage 6 

In den drei Graphiken sind je zwei komplexe Zahlen z und w eingezeichnet. Skizzieren Sie jeweils mit rein graphischen Mitteln die Positionen der Zahlen z^2 , $z^{\frac{1}{2}}$, w^2 und $w^{\frac{1}{2}}$.

$$z^2, z^{\frac{1}{2}}, w^2 \text{ und } w^{\frac{1}{2}}.$$

Was fällt Ihnen auf? Welche Eigenschaft haben die Punkte z und w einer Graphik jeweils gemeinsam?

Anmerkung: Bei komplexen Zahlen mit rationalem Exponenten sind jeweils die Hauptwerte der Wurzeln gemeint.



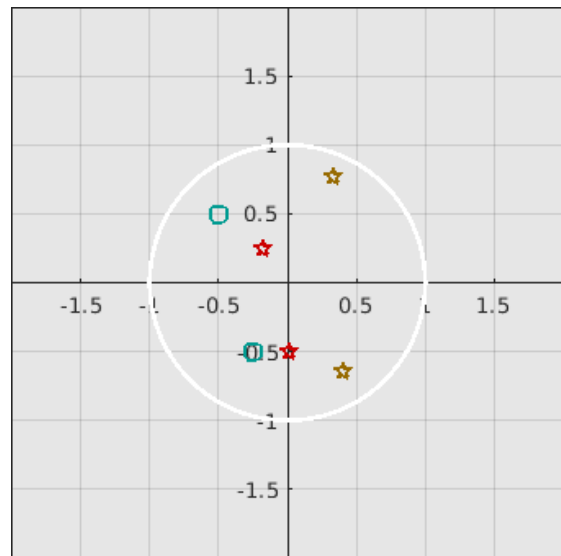
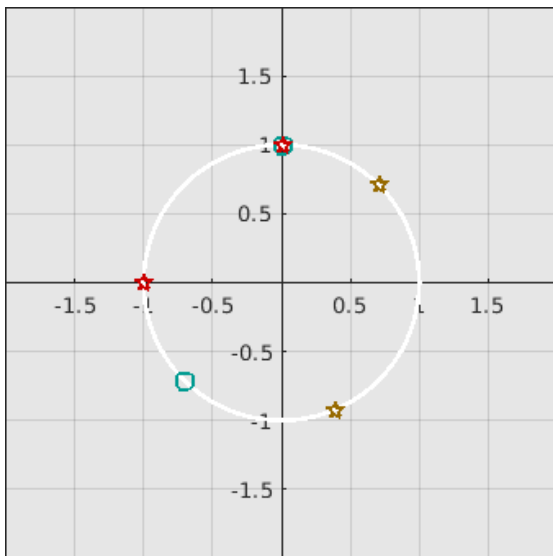
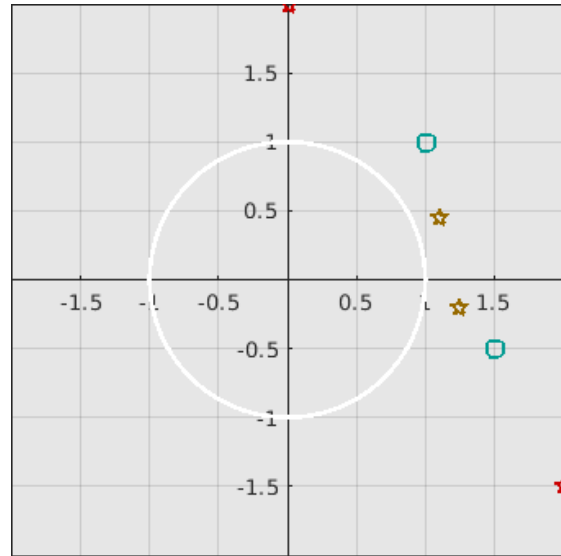
Frage 7 

Falls Ihnen die vorherige Aufgabe keine Schwierigkeiten bereitet hat so können Sie Ihre Ergebnisse teilweise hier nachprüfen.

Hat Ihnen die vergangene Aufgabe Schwierigkeiten bereitet so betrachten Sie diese Aufgabe als vereinfachte Variante.

Die Ergebniszahlen sind bereits graphisch abgebildet. Sie müssen nun nur noch zuordnen.

Sehen Sie nun die Gemeinsamkeiten?



(PSEUDO-) POTENZ

Frage 8

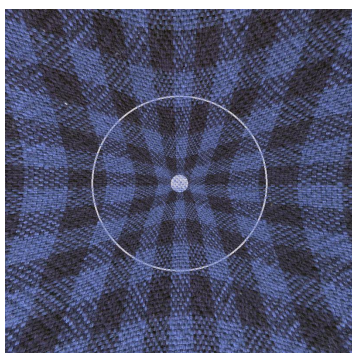


Originalbild

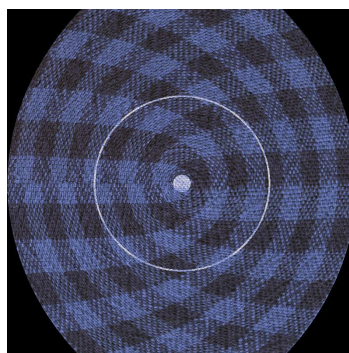
Auf die Koordinaten z in Exponentialform der Bildpixel im links dargestellten Bild werde folgende Abbildung ausgeführt:

$$(p_1, p_2) \mapsto |z|^{p_1} e^{i \text{Arg}(z) p_2}$$

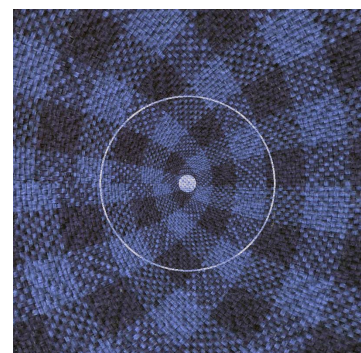
Für $p_1 = p_2$ handelt es sich um die Potenz von komplexen Zahlen. Wir lassen zur Spielerei $p_1 \neq p_2$ zu, so können wir die Auswirkung der Potenz an den beiden Stellen separat voneinander untersuchen.



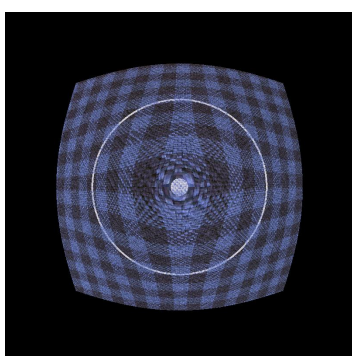
A



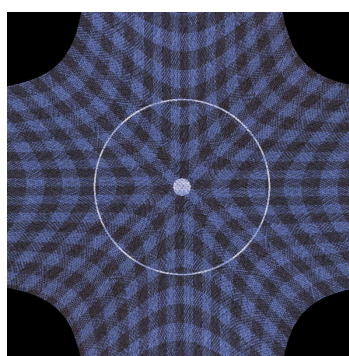
B



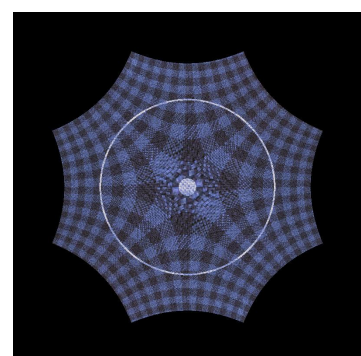
C



D



E



F

Frage: Welche Paare (p_1, p_2) liefern welches Bild?

- | | | | |
|-----|--------------------------|--------------------------|--|
| A | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | $p_1 = 2, p_2 = 1$ |
| B | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | $p_1 = 1, p_2 = \frac{1}{2}$ |
| C | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | $p_1 = 1, p_2 = 2$ |
| D | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | $p_1 = 2, p_2 = 2$ |
| E | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2}$ |
| F | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = 1$ |

Frage 9 



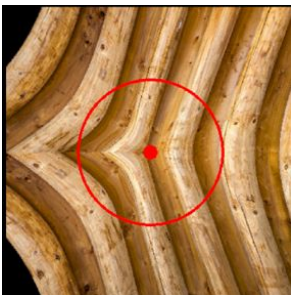
Originalbild

Auf die Koordinaten z in Exponentialform der Bildpixel im links dargestellten Bild werde folgende Abbildung ausgeführt:

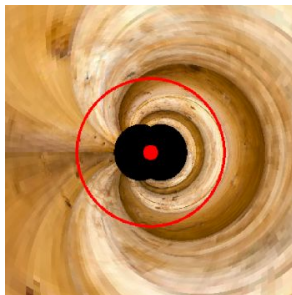
$$(p_1, p_2) \mapsto |z|^{p_1} e^{i \text{Arg}(z) p_2}$$

Welche Paare (p_1, p_2) liefern welches resultierende Bild?

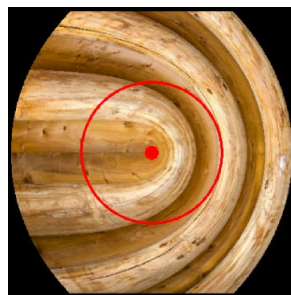
- | | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| $p_1 = 1.2, p_2 = 0.8$
1 | $p_1 = 0.5, p_2 = 0.5$
2 | $p_1 = 1.0, p_2 = 2.0$
3 | $p_1 = -1.0, p_2 = 2.0$
4 |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|



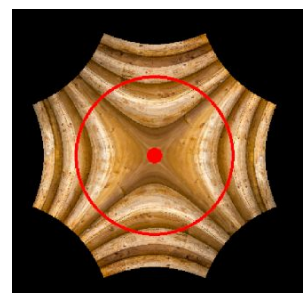
A



B



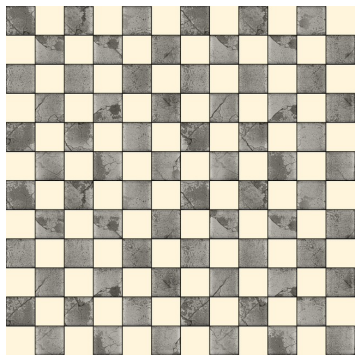
C



D

 APP-SPIELEREI

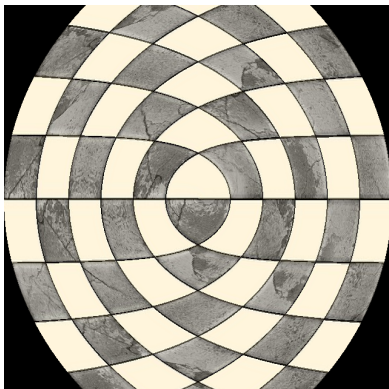
Frage 10



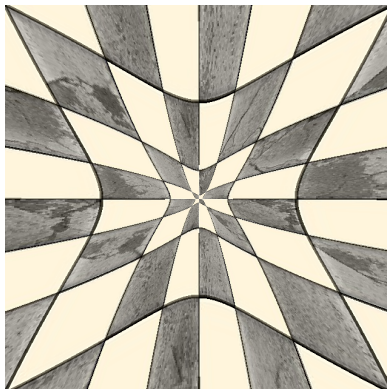
Originalbild

Laden Sie in der BiLeSA-App das Schachbrett in der Testbildgalerie und versuchen Sie die folgenden Bilder zu erzeugen.

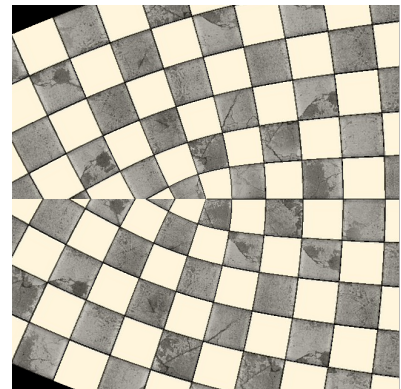
Welche Bilder stellen tatsächlich das Potenzieren von komplexen Zahlen dar?



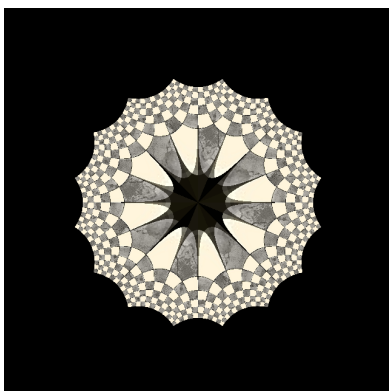
A



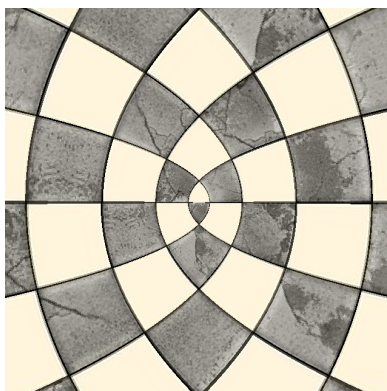
B



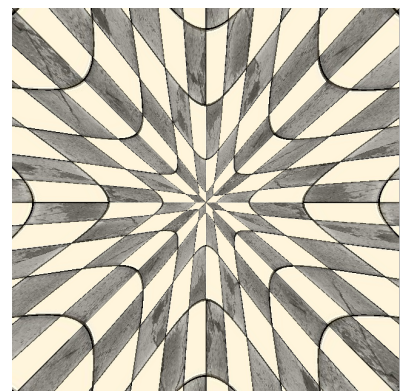
C



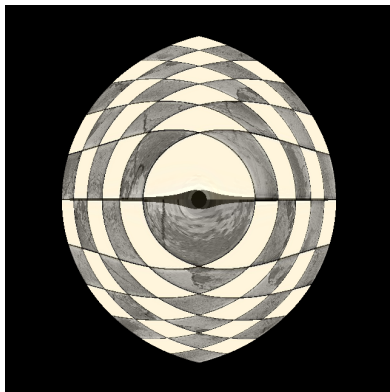
D



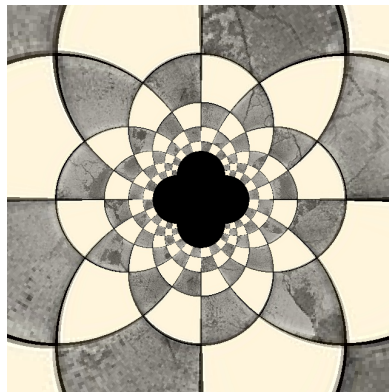
E



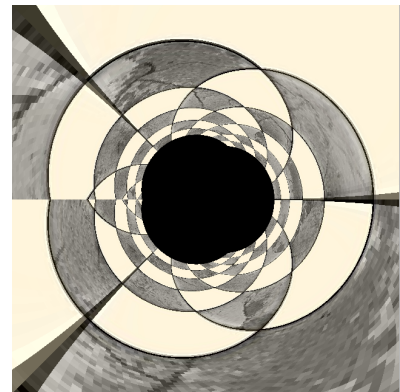
F



G



H



I

Welche Werte für p_1 und p_2 haben Sie verwendet?

Bild	p_1	p_2	Bild	p_1	p_2
A			F		
B			G		
C			H		
D			I		
E					

Bildquellen: pixabay.com (Schachbrett: DarkmoonArt_de; Glühbirne: Memed Nurrohmad; Stift: Clker-Free-Vector-Images; Mobile-Icon: Tiffany Loyd; Rundholz: Jeon Sang-O; karierte Tischdecke: Gerd Altmann)